

Contrôle Équation Différentielle Ordinaires (EDO)

Durée: 3 heures

Exercice 1 (Deux équations linéaires du 1^{er} ordre,)

Soient $a > 0$ et $y_0 > 0$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -ay(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

1. Donner la solution du problème (1)
(c'est-à-dire la fonction $y \in C([0; +\infty[, \mathbb{R}) \cap C^1(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ solution de (1)

Soit $b > 0$. On s'intéresse maintenant au problème de Cauchy suivant, avec y donnée à la question 1:

$$\begin{cases} z'(t) = -bz(t) + ay(t), & t > 0, \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

2. On suppose, dans cette question, que $a \neq b$

(a) Donner la solution de (2)

(b) Donner les valeurs de $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$ et $\int_0^{+\infty} z(t)dt$.

3. On suppose, dans cette question, que $a = b$.

(a) Donner la solution de (2)

(b) Donner les valeurs de $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$ et $\int_0^{+\infty} z(t)dt$.

Exercice 2 (Une équation non linéaire du 1^{er} ordre,)

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t + \sin(t + y^2(t)), & t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

1. En appliquant les théorèmes du cours, montrer que le problème (3) admet une solution maximale.

On note y la solution maximale donnée à la question 1,
 $y \in C([0, T_m[, \mathbb{R}) \cap C^1(]0, T_m[, \mathbb{R})$

2. Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

3. Montrer que $T_m = +\infty$

6

Exercice 3

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T] \\ y(0) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4)$$

où $f \in C^2$ de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L .

Soit a un paramètre fixé dans $[0, 1]$.

Étudier, en fonction de a , la consistance, la stabilité et l'ordre de la méthode suivante:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + ah, y_n + ahf(t_n, y_n))$$

$$\text{où } t_n = nh, \quad h = \frac{T}{N}$$

Bon courage et bonne inspiration !!!

Contrôle-EDO 2h15

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy

$$y' - \frac{y}{t} - y^2 = -9t^2 \quad (1)$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$, avec la condition initiale $y(1) = 4$.

1. Justifier que ce problème admet une unique solution maximale, notée (φ, J) .
2. Déterminer $a > 0$ pour que $t \mapsto at$ soit solution de (1).
3. Montrer que la fonction $t \mapsto at - \varphi(t)$ ne s'annule pas sur J .
4. On définit $\psi(t) = \frac{1}{at - \varphi(t)}$.
- a) Exprimer φ en fonction de ψ et en déduire que ψ est solution sur J de l'équation différentielle

$$y' + \left(6t + \frac{1}{t}\right)y = 1 \quad (2)$$

5. Donner la forme générale des solutions de (2) sur $]0, +\infty[$.
6. Calculer $\psi(t)$.
7. Déterminer φ et J .

Exercice 2

Soit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du premier ordre suivant

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = -ax(t) + b, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

1. a) Donner explicitement x .
 - b) Quel est le comportement de $x(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
 2. Soit $h > 0$ un pas de temps.
 - a) Ecrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (3). On notera $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (nh)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation et (x_n) la suite des valeurs approchées correspondantes.
 - b) Donner explicitement $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - c) Quelle condition doit satisfaire h pour que, quel que soit x_0 , x_n tende vers $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
 - d) On suppose cette condition satisfaite.
- Exprimer en fonction de a le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de $x|_{[0,10]}$.
- Quel est ce nombre lorsque $a = 100$?
- e) Répondre à a), b) et c) en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite.

Contrôle Équation Différentielle Ordinaires (EDO)
Durée: 3 heures

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{20\sqrt{1-t^2}} \frac{y}{(1+y^2)^3} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $t_0 \in]-1; 1[$, $y_0 \in \mathbb{R}$

Les questions 3 et 4 peuvent être traitées indépendamment de la question 1.

1. Soit $-1 < a < t_0 < b < 1$. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[a; b]$, et pour $\varphi \in E$ on pose $\|\varphi\| = \max_{t \in [a; b]} |\varphi(t)|$.

(a) Pour $\varphi \in E$ et $t \in [a; b]$, on pose

$$T(\varphi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \frac{1}{20\sqrt{1-s^2}} \frac{\varphi(s)}{(1+\varphi(s)^2)^3} ds$$

Vérifier que T est une application bien définie sur E , à valeurs dans E .

(b) Montrer que la fonction φ est solution de (1) sur $[a; b]$ si et seulement si $\varphi \in E$ et vérifie $\forall t \in [a; b]$, $\varphi(t) = T(\varphi)(t)$

(c) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^3}$ est 5-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$\forall \varphi, \psi \in E, \quad \forall t \in [a; b], \quad |T(\varphi)(t) - T(\psi)(t)| \leq C \|\varphi - \psi\|$$

où C est une constante (indépendante de φ, ψ et t) exprimée sous la forme d'une intégrale que l'on calculera (on rappelle que $\arccos'(s) = \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}}$ sur $] -1; 1[$).

(d) Montrer qu'il existe une unique fonction $\varphi_{a,b} \in E$ telle que $T(\varphi_{a,b}) = \varphi_{a,b}$.

2. Déduire de la question 1. que le problème (1) admet une unique solution sur $] -1; 1[$, notée φ .

3. Que vaut φ si $y_0 = 0$?

4. On suppose $y_0 > 0$.

(a) Montrer que φ ne s'annule pas sur $] -1; 1[$.

(b) En déduire que la fonction φ est strictement monotone, et qu'elle a une limite finie quand t tend vers -1 .

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

1. Vérifier que la solution analytique est $y(t) = 5e^{2t}$.
2. En posant $h = \frac{1}{N}$, montrer que les approximations fournies par la méthode d'Euler explicite peuvent s'écrire comme $y_n = 5(1 + 2h)^n$, pour $n = 0, \dots, N$.
3. Vérifier numériquement que l'erreur $e(h)$ se comporte suivant la relation $e(h) \approx Kh$, où K est une constante

Exercice 3

Soit le problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(0) = y_0$, avec $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ globalement Lipschitzienne par rapport à y , uniformément en t . Étudier la consistance et la stabilité de la méthode (dite de Heun)

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f\left(t_{n+1}, y_n + h f(t_n, y_n)\right) \right] \quad \text{où} \quad t_n = nh, \quad h = \frac{T}{N}.$$